

1. Μια εταιρεία τσιμέντων χρησιμοποιεί τα δικά της φορτηγά για να μεταφέρει συσκευασμένο τσιμέντο από το εργοστάσιό της, στο κοντινό λιμάνι για τη φόρτωση του τσιμέντου σε πλοία. Για την εκφόρτωση συσκευασμένου τσιμέντου χρησιμοποιείται εργατικό προσωπικό της εταιρείας. Εμπειρικά έχει υπολογιστεί ότι δύο άτομα μπορούν να εκφορτώσουν ένα πλήρες φορτίο σε μία ώρα. Αν χρησιμοποιηθούν περισσότερα ή λιγότερα άτομα αντίστοιχα, τότε ο χρόνος εκφόρτωσης μεταβάλλεται ανάλογα (δηλαδή, για την εκφόρτωση ενός φορτίου με ένα άτομο απαιτούνται 2 ώρες, ενώ αν υπάρχουν 2 άτομα η εκφόρτωση μπορεί να ολοκληρωθεί σε μια ώρα κ.ο.κ.). Για κάθε ώρα που το φορτηγό αναμένει μέχρι να αρχίσει η εκφόρτωσή του, η εταιρεία επιβαρύνεται με κόστος 160€ (απώλεια παραγωγικής χρήσης του φορτηγού, κόστος οδηγού κ.λ.π.). Το αντίστοιχο ωριαίο κόστος για τους εκφορτωτές είναι 50€/ώρα. Τα φορτηγά αναχωρούν από το εργοστάσιο και φτάνουν στο λιμάνι με μέσο ρυθμό δύο φορτηγών ανά ώρα, σύμφωνα με την κατανομή Poisson. Η επιχείρηση ενδιαφέρεται να προσδιορίσει, προσαρμόζοντας ένα M/M/1 σύστημα, το βέλτιστο αριθμό εκφορτωτών που πρέπει να εργάζονται ώστε να ελαχιστοποιήσει το συνολικό κόστος της εκφόρτωσης του τσιμέντου.

2. Μια εταιρεία βρίσκεται στη διαδικασία αγοράς ενός εμπορικού φωτοτυπικού μηχανήματος υψηλής ταχύτητας. Υπάρχουν τέσσερα μοντέλα που έχουν προταθεί από τους πωλητές, οι προδιαγραφές των οποίων παρουσιάζονται στη συνέχεια

Μοντέλο φωτοτυπικού	Λειτουργικό κόστος (ευρώ/ ώρα)	Ταχύτητα (φύλλα/λεπτό)
1	15	30
2	20	36
3	24	50
4	27	66

Οι εργασίες φθάνουν στην εταιρεία σύμφωνα με την κατανομή Poisson με ρυθμό 4 εργασιών ανά ημέρα (24 ώρες). Το μέγεθος των εργασιών είναι τυχαίο αλλά κατά μέσο όρο είναι περίπου ίσο με 10000 φύλλα ανά εργασία και ο χρόνος για την διεκπεραίωση τους εκθετικός. Τα συμβόλαια με τους πελάτες προσδιορίζουν ένα κόστος - ποινή για καθυστερημένη παράδοση που είναι ίσο με 80 ευρώ ανά εργασία και ανά ημέρα. Ποιο φωτοτυπικό θα πρέπει να αγοράσει η εταιρεία;

3. Στις εγκαταστάσεις μιας αποθήκης εργαλείων με πολλούς υπαλλήλους, οι αιτήσεις για εργαλεία για την επισκευή/συντήρηση μηχανών συμβαίνουν σύμφωνα με την κατανομή Poisson με ρυθμό 17.5 αιτήσεις την ώρα. Ο κάθε υπάλληλος μπορεί να χειριστεί κατά μέσο όρο 10 αιτήσεις την ώρα. Το κόστος της πρόσληψης ενός νέου υπαλλήλου είναι 12 ευρώ την ώρα. Το κόστος της παραγωγής που χάνεται για την κάθε μηχανή που αναμένει και ανά ώρα είναι περίπου 50 ευρώ. Να προσδιορίσετε το βέλτιστο αριθμό υπαλλήλων για το σύστημα.

4. Θεωρούμε ένα M/M/1 σύστημα με ρυθμό αφίξεων λ , ρυθμό εξυπηρέτησης μ ($\lambda < \mu$). Έστω ότι για κάθε πελάτη υπάρχει κόστος h ανά μονάδα χρόνου παραμονής του στο σύστημα. Επίσης υπάρχει ένα κόστος εργασίας του υπαλλήλου το οποίο είναι ανάλογο του ρυθμού εξυπηρέτησης συγκεκριμένα ίσο με $c\mu$ όπου c γνωστή σταθερά. Το κόστος εργασίας υπάρχει ανεξάρτητα αν ο υπάλληλος εξυπηρετεί ή όχι.

1. Να υπολογιστεί το μέσο συνολικό κόστος ανά μονάδα χρόνου σε στατιστική ισορροπία
2. Να βρεθεί το μ που ελαχιστοποιεί το μέσο συνολικό κόστος ανά μονάδα χρόνου
3. Να επαναληφθούν τα (1) και (2) για την περίπτωση που υπάρχει κόστος μόνο όταν ο υπάλληλος εξυπηρετεί

5. Σε ένα M/M/1 σύστημα με ρυθμό αφίξεων λ , ρυθμό εξυπηρέτησης μ ($\lambda < \mu$) ο διαχειριστής του συστήματος έχει τη δυνατότητα να προσδιορίσει το ποσοστό p των πελατών, από αυτούς που φθάνουν στο σύστημα, που γίνονται δεκτοί για εξυπηρέτηση (οι υπόλοιποι πελάτες απορρίπτονται). Κάθε πελάτης που γίνεται δεκτός στο σύστημα αποφέρει R χρηματικές μονάδες από την εξυπηρέτησή του. Επίσης κάθε πελάτης που παραμένει στο σύστημα (είτε σε αναμονή είτε σε εξυπηρέτηση) έχει κόστος c χ.μ.. Ένας πελάτης που απορρίπτεται δεν έχει ούτε έσοδα ούτε έξοδα.

1. Να βρεθεί το μέσο καθαρό κέρδος όλων των πελατών στη μονάδα του χρόνου συναρτήσει του p , $U(p)$
2. Να βρεθεί το p που μεγιστοποιεί το $U(p)$

6. Σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης με έναν υπάλληλο οι αφίξεις ακολουθούν την κατανομή Poisson με ρυθμό λ . Ένας πελάτης που βρίσκει n πελάτες στο σύστημα έχει πιθανότητα $\frac{1}{M-n}$ να μπει στο χώρο αναμονής διαφορετικά αποχωρεί χωρίς να εξυπηρετηθεί. Οι πελάτες που μπαίνουν στο σύστημα περιμένουν στο χώρο αναμονής. Υπάρχει ένας υπάλληλος που παραμένει αδρανής όσο ο χώρος αναμονής έχει λιγότερους από M πελάτες. Τη στιγμή που μπαίνει ο M -στος πελάτης ο υπάλληλος αρχίζει να εξυπηρετεί και τους M πελάτες ταυτόχρονα. Ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί εκθετική κατανομή με ρυθμό μ και όταν ολοκληρωθεί η εξυπηρέτηση οι πελάτες αποχωρούν από το σύστημα ταυτόχρονα ενώ ο υπάλληλος μπαίνει πάλι σε αδράνεια. Πελάτες που φθάνουν στο σύστημα όσο διαρκεί η εξυπηρέτηση απορρίπτονται. Κάθε πελάτης που μπαίνει στο σύστημα πληρώνει R χρηματικές μονάδες ενώ ο υπάλληλος αμείβεται c χρηματικές μονάδες ανά μονάδα χρόνου.
- 1) Να υπολογιστεί η οριακή κατανομή του αριθμού πελατών στο σύστημα σε στατιστική ισορροπία και ο αναμενόμενος αριθμός πελατών που απορρίπτονται στη μονάδα του χρόνου σε στατιστική ισορροπία
 - 2) Να βρεθεί το M που μεγιστοποιεί το καθαρό μέσο κέρδος στη μονάδα του χρόνου
7. Ένα κέντρο εξυπηρέτησης έχει 2 θέσεις και χώρο εξυπηρέτησης για 2 πελάτες. Οι πελάτες φθάνουν σύμφωνα με τη διαδικασία Poisson με ρυθμό 10 πελάτες την ώρα. Όταν ο χώρος αναμονής είναι γεμάτος οι πελάτες που φθάνουν στο σταθμό δεν εισέρχονται σε αυτόν. Ο χρόνος εξυπηρέτησης του πελάτη ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή 5 min. Τα έσοδα του σταθμού από κάθε πελάτη που εξυπηρετείται είναι 20 ευρώ. Το κόστος λειτουργίας κάθε θέσης όταν αυτή εξυπηρετεί είναι 90 ευρώ/ώρα ενώ το κόστος αναμονής των πελατών είναι 400 ευρώ ανά ώρα αναμονής για κάθε πελάτη που περιμένει. Ποιο είναι το κέρδος του σταθμού ανά ώρα;
8. Θεωρούμε ένα M/M/1 σύστημα με ρυθμό αφίξεων λ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ . Το σύστημα μπορεί να καταστραφεί και οι καταστροφές συμβαίνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό ξ . Όταν συμβεί μια καταστροφή όλοι οι παρόντες πελάτες απομακρύνονται από το σύστημα.
1. Να βρεθεί η οριακή κατανομή του αριθμού πελατών στο σύστημα σε στατιστική ισορροπία
 2. Θεωρείστε έναν πελάτη που κατά την άφιξη του βρίσκει n πελάτες στο σύστημα. Να βρεθεί η πιθανότητα να απομακρυνθεί από το σύστημα πριν προλάβει να εξυπηρετηθεί
9. Μια καφετέρια διαθέτει καθίσματα για το πολύ 50 άτομα. Οι πελάτες φθάνουν με κατανομή Poisson με μέση τιμή 10 πελάτες την ώρα και εξυπηρετούνται ένας-ένας με ρυθμό 12 πελάτες την ώρα θεωρώντας ότι η εξυπηρέτηση καθενός ακολουθεί την εκθετική κατανομή.
1. Ποια η πιθανότητα ένας πελάτης που φθάνει στην καφετέρια δε θα μπορέσει να βρει θέση;
 2. Αν τρεις πελάτες θα ήθελαν να καθίσουν μαζί, ποια είναι η πιθανότητα να μπορεί να πραγματοποιηθεί η επιθυμία τους; (υποθέτουμε ότι μπορούν να διευθετηθούν έτσι τα πράγματα ώστε να καθίσουν μαζί εφόσον υπάρχουν τρία διαθέσιμα καθίσματα)
10. Το κέντρο υπολογιστών ενός πανεπιστημίου έχει 4 πανομοιότυπους κεντρικούς υπολογιστές. Ο αριθμός των υποβαλλόμενων εργασιών στο κέντρο είναι 120 την ώρα με το χρόνο ανάμεσα στις υποβολές να είναι εκθετικός. Οι εργασίες που φθάνουν διαβιβάζονται αυτόματα στον πρώτο διαθέσιμο υπολογιστή. Ο χρόνος εκτέλεσης ανά υποβολή είναι εκθετικός με μέση τιμή 2 λεπτά. Να υπολογιστούν:
1. Η πιθανότητα μια υπηρεσία να μην εκτελεστεί άμεσα με την υποβολή της
 2. Το μέσο χρόνο για τη διεκπεραίωση μιας εργασίας
 3. Το μέσο αριθμό εργασιών που περιμένουν εκτέλεση
 4. Το μέσο αριθμό υπολογιστών χωρίς εργασία
11. Δίνονται Α) μια M/M/2 ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ σε κάθε υπάλληλο, Β) Δυο ουρές M/M/1 με ρυθμό αφίξεων $\lambda/2$ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ σε κάθε μια, Γ) Μια M/M/1 με ρυθμό αφίξεων λ ρυθμό εξυπηρέτησης 2μ . Να συγκριθούν τα παραπάνω συστήματα ως προς L , L_q , $E(W)$, $E(W_q)$

12. Ας υποθέσουμε ότι σε ένα γραφείο πολεοδομίας ενός μικρού δήμου υποβάλλονται κατά μέσο όρο 5 αιτήσεις έκδοσης οικοδομικών αδειών ανά μήνα. Λόγω αλλαγών στην νομοθεσία στους επόμενους μήνες αναμένεται αύξηση του ρυθμού υποβολής αιτημάτων σε 10 ανά μήνα. Ο αρμόδιος υπάλληλος της πολεοδομίας ανησυχεί για τη δυνατότητα εξυπηρέτηση των πολιτών και σκέφτηκε να καταγράψει τα στατιστικά στοιχεία των χρόνων έκδοσης μιας οικοδομικής άδειας για το προηγούμενο έτος στον παρακάτω πίνακα συχνότητας.

Χρόνος έκδοσης	Αριθμός Αιτήσεων	Ποσοστό Αιτήσεων
1 ημέρα	48	40%
2 ημέρες	36	30%
3 ημέρες	24	20%
4 ημέρες	12	10%
Σύνολο	120	100%

αίτηεις $\rightarrow$ Poisson

μ/μ/λ

Με βάση τα παραπάνω στοιχεία ο αρμόδιος υπάλληλος θέλει να εξετάσει αν κατ' αρχήν έχει τη δυνατότητα εξυπηρέτησης των πολιτών που θα υποβάλλουν αίτηση έκδοσης οικοδομικής άδειας και στη συνέχεια να υπολογίσει το χρόνο αναμονής για την έκδοση αδειών (ένας μήνας έχει κατά μέσο όρο 22 εργάσιμες ημέρες).

13. Σε μια γραμμή παραγωγής τα προϊόντα φτάνουν ένα κάθε φορά μπροστά σε ένα μηχάνημα προκειμένου να γίνει ποιοτικός έλεγχος. Τα προϊόντα φτάνουν σύμφωνα με την κατανομή Poisson με μέση τιμή 6 προϊόντα την ώρα και ίσως χρειαστεί να σχηματίσουν ουρά μπροστά στο μηχάνημα. Ο χρόνος για τον έλεγχο είναι εκθετικός με μέση τιμή τα 10 λεπτά. Για όλους τους πρακτικούς σκοπούς δεν υπάρχει περιορισμός όσον αφορά το μέγεθος του συστήματος.

1. Ο διευθυντής παραγωγής θέλει να προσδιορίσει το μέγεθος του χώρου μπροστά από το μηχάνημα.
2. Ποιο θα ήταν το μέγεθος του χώρου αυτού αν απαιτηθεί για ένα προϊόν που φτάνει για έλεγχο να υπάρχει χώρος τουλάχιστον το 95% των φορές.
3. Υποθέστε ότι η γραμμή παραγωγής έχει σχεδιαστεί ώστε να έχει 4 θέσεις αναμονής προϊόντων προς έλεγχο. Εάν ο χώρος καλυφθεί διακόπτεται η διαδικασία. Ο διευθυντής θέλει να προσδιορίσει την επίδραση του περιορισμένου χώρου στη λειτουργία του συστήματος.
4. Ποιος είναι ο αναμενόμενος συνολικός χρόνος στο σύστημα στις 2 περιπτώσεις (θεωρώντας το σύστημα περιορισμένης και άπειρης χωρητικότητας).
5. Αν εγκατασταθεί ένα νέο μηχάνημα έτσι ώστε ο χρόνος ελέγχου για όλα τα προϊόντα να είναι σταθερός και ίσος με 10 λεπτά. Με ποιον τρόπο το νέο μηχάνημα επηρεάζει τη λειτουργία της γραμμής παραγωγής;

14. Οι πελάτες φθάνουν σε ένα κατάστημα γρήγορου φαγητού σύμφωνα με την κατανομή Poisson με μέση τιμή 40 πελάτες την ώρα. Η εξυπηρέτηση ανά πελάτη διαρκεί περίπου 10 λεπτά και είναι εκθετικά κατανομημένη.

1. Ο διευθυντής επιθυμεί να περιορίσει το μέσο χρόνο αναμονής στην ουρά σε όχι περισσότερο από 5 λεπτά. Πόσους υπάλληλους θα πρέπει να έχει το κατάστημα;
2. Πόσους υπάλληλους θα πρέπει να έχει το κατάστημα ώστε η πιθανότητα το σύστημα να έχει πάνω από 2 πελάτες να είναι μικρότερη από 0.2;

15. Σε μια εταιρεία πρόκειται να προσληφθεί ένας μηχανικός για την επισκευή της γραμμής παραγωγής οι βλάβες στην οποία συμβαίνουν με ένα μέσο ρυθμό 3 ανά ώρα. Ο αριθμός βλαβών ακολουθεί κατανομή Poisson. Το κόστος για το μη παραγωγικό χρόνο της μηχανής υπολογίζεται σε 16 χ.μ ανά ώρα. Η εταιρεία θα επιλέξει μεταξύ δύο υποψήφιων μηχανικών. Ο μηχανικός Α επισκευάζει 4 βλάβες την ώρα και απαιτεί 8 χ.μ. ανά ώρα. Ο μηχανικός Β επισκευάζει 6 βλάβες την ώρα και απαιτεί 10 χ.μ. Ποιος μηχανικός πρέπει να προσληφθεί;

16. Σε μία εταιρεία τα παραγόμενα προϊόντα πρέπει να περάσουν από δύο διαδοχικούς ελέγχους. Έτσι κάθε προϊόν περιμένει στην αρχή σε μία ουρά για να ελεγχθεί το βάρος του (από το μοναδικό υπάλληλο), ενώ στη συνέχεια πηγαίνει σε μία δεύτερη ουρά όπου ένα ηλεκτρονικό μηχάνημα ελέγχει την ποιότητα του

4/4/39/40

προϊόντος. Τα προϊόντα φτάνουν στην πρώτη ουρά σύμφωνα με την κατανομή Poisson με μέση τιμή 3 προϊόντα στα 10 λεπτά ενώ οι χρόνοι εξυπηρέτησης ακολουθούν και στις δύο ουρές εκθετική κατανομή με μέση τιμή 3 λεπτά ανά προϊόν στην πρώτη και 2 λεπτά ανά προϊόν στη δεύτερη. Οι χώροι αναμονής στις δύο ουρές μπορούν να θεωρηθούν απείρου μήκους και οι πειθαρχίες FCFS. Να βρεθεί η πιθανότητα να υπάρχει 1 προϊόν στον έλεγχο βάρους και 2 προϊόντα στον έλεγχο ποιότητας.

17. Ο υπόγειος χώρος στάθμευσης ενός πολυκαταστήματος έχει 30 θέσεις στάθμευσης αλλά μπορεί να φιλοξενήσει άλλα 10 αυτοκίνητα στους διαδρόμους του, αυτά τα πρόσθετα 10 αυτοκίνητα δεν μπορούν να σταθμεύσουν μόνιμα στους διαδρόμους και πρέπει να περιμένουν τη διαθεσιμότητα κάποιας από τις 30 θέσεις στάθμευσης. Οι πελάτες φτάνουν στο χώρο στάθμευσης σύμφωνα με την κατανομή Poisson με μέση τιμή 20 αυτοκίνητα την ώρα. Ο μέσος χρόνος στάθμευσης ανά αυτοκίνητο είναι περίπου 60 λεπτά και στην ακολουθεί εκθετική κατανομή.

1. Ποιο είναι το ποσοστό των πελατών που φεύγουν επειδή δεν μπορούν να εισέλθουν στο χώρο στάθμευσης.
2. Ποια η πιθανότητα να υπάρχουν 35 αυτοκίνητα στο χώρο;
3. Ποια είναι η πιθανότητα ότι ένα αυτοκίνητο που φθάνει να περιμένει στους διαδρόμους του χώρου στάθμευσης;
4. Να προσδιορίσετε το μέσο αριθμό των κατειλημμένων θέσεων στάθμευσης.
5. Να προσδιορίσετε το πλήθος των πελατών που θα φύγουν από το χώρο στάθμευσης κατά τη διάρκεια μιας περιόδου 8 ωρών, επειδή ο χώρος στάθμευσης είναι τελείως γεμάτος.

4/4/2

18. Ένας μηχανικός παρακολουθεί 5 μηχανές. Μετά από την ολοκλήρωση από την κάθε μηχανή ενός κύκλου εργασιών ο μηχανικός θα πρέπει να την ελέγξει. Ο χρόνος εκτέλεσης του κύκλου εργασιών είναι εκθετικός με μέση τιμή 45 λεπτά ο χρόνος για τον έλεγχο κάθε μηχανής είναι επίσης εκθετικός με μέση τιμή 8 λεπτά.

1. Να προσδιοριστεί το μέσο πλήθος μηχανών που βρίσκονται σε διαδικασία ελέγχου
2. Να υπολογιστεί η πιθανότητα ότι όλες οι μηχανές είναι σε λειτουργία.
3. Να προσδιοριστεί ο μέσος χρόνος που μια μηχανή είναι εκτός λειτουργίας